§ 7. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В случае криволинейного движения по плоскости имеется два дифференциальных уравнения движения точки в декартовой системе координат, а в общем случае движения в пространстве — система трех дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения криволинейного движения точки интегрируются сравнительно просто, если каждое из этих уравнений интегрируется независимо от других уравнений и при этом возможен один из трех рассмотренных случаев зависимости проекции равнодействующей силы от времени, координаты и скорости.

Рассмотрим примеры криволинейного движения точки в плоскости и в пространстве.

Пример 1. Материальная точка массой m (рис. 11) движется по плоскости под действием силы притяжения $\bar{F}$ к неподвижной точке O. Сила притяжения (сила упругости) изменяется по закону $\bar{F}=-mk^2\bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор

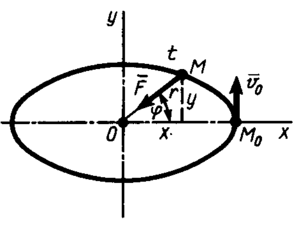

Рис. 11

движущейся точки, проведенный из точки O; k — постоянный коэффициент. В начальный момент $t=0$ $x=l$, $y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$, если начало координат выбрано в неподвижной точке O.

Определить уравнения движения точки и уравнение ее траектории в координатной форме.

Решение. Пусть в момент t движущаяся точка имеет координаты x и y. Прикладываем к точке силу $\bar{F}$ и составляем дифференциальные уравнения ее движения в проекциях на оси координат. Имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y;$$

$$F_x=-mk^2r\cos\varphi; \quad F_y=-mk^2r\sin\varphi.$$

Учитывая, что

$$r\cos\varphi=x; \quad r\sin\varphi=y,$$

дифференциальные уравнения принимают форму

$$d^2x/dt^2=-k^2x; \quad d^2y/dt^2=-k^2y.$$

Для интегрирования этих уравнений можно применить подстановки

$$\frac{d^2x}{dt^2}=v_x\frac{dv_x}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}=v_y\frac{dv_y}{dy},$$

или интегрировать их как линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Выполним интегрирование уравнений, используя подстановки. Имеем

$$\int_0^v v_x dv_x=-k^2\int_l^x x\,dx,$$

или

$$\frac{v_x^2}{2}=\frac{k^2}{2}(l^2-x^2).$$

Аналогично для v_y получаем

$$\frac{v_y^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}=-\frac{k^2}{2}y^2.$$

Учитывая, что

$$v_x=dx/dt; \quad v_y=dy/dt,$$

имеем

$$dx/dt=k\sqrt{l^2-x^2}; \quad dy/dt=k\sqrt{v_0^2/k^2-y^2}.$$

Эти дифференциальные уравнения интегрируем путем разделения переменных. Получаем

$$\int_l^x\frac{dx}{\sqrt{l^2-x^2}}=k\int_0^t dt; \quad \int_0^y\frac{dy}{\sqrt{v_0^2/k^2-y^2}}=k\int_0^t dt.$$

Выполняя интегрирование и подставляя пределы, имеем

$$\arcsin\frac{x}{l}-\arcsin 1=kt; \quad \arcsin\frac{y}{v_0/k}-\arcsin 0=kt,$$

или

$$\frac{x}{l}=\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right)=\cos kt; \quad \frac{y}{v_0/k}=\sin kt$$

и уравнения движения точки принимают вид

$$x=l\cos kt; \quad y=(v_0/k)\sin kt.$$

Возводя в квадрат $\cos kt$ и $\sin kt$, получаем уравнение траектории точки в координатной форме:

$$x^2/l^2+k^2y^2/v_0^2=1.$$

Траекторией точки оказался эллипс с полуосями l и v_0/k.

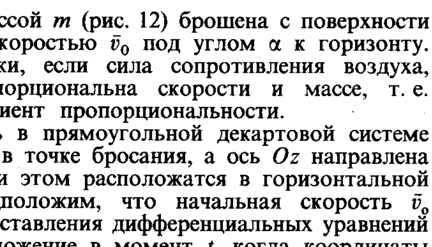

Рис. 12

Пример 2. Материальная точка массой m (рис. 12) брошена с поверхности Земли в вертикальной плоскости со скоростью $\bar{v}_0$ под углом α к горизонту. Определить уравнения движения точки, если сила сопротивления воздуха, направленная против скорости, пропорциональна скорости и массе, т. е. $R=kmv$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Решение. Задачу удобно решать в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой находится в точке бросания, а ось Oz направлена по вертикали вверх. Оси Ox и Oy при этом расположатся в горизонтальной плоскости. Для определенности предположим, что начальная скорость $\bar{v}_0$ располагается в плоскости Oyz. Для составления дифференциальных уравнений движения точки возьмем такое ее положение в момент t, когда координаты точки x, y, z и их первые производные по времени положительны. На точку действуют две силы: сила тяжести $\bar{P}$, направленная по вертикали вниз, и сила сопротивления $\bar{R}$, направление которой противоположно направлению скорости $\bar{v}$. Равнодействующая сила

$$\bar{F}=\bar{P}+\bar{R},$$

причем $\bar{R}=-km\bar{v}$.

Для проекций равнодействующей силы $\bar{F}$ на оси координат, считая, что в выбранном положении точки и положительных значениях v_x, v_y, v_z, имеем

$$F_x=-kmv_x=-km\dot{x};$$
$$F_y=-kmv_y=-km\dot{y};$$
$$F_z=-mg-kmv_z=-mg-km\dot{z}.$$

Знак минус у проекций силы сопротивления указывает на то, что их знаки противоположны знакам проекций скорости, принятым положительными.

Дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-km\dot{x}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk\dot{y}; \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg-mk\dot{z}. \tag{а}$$

При сделанном выборе осей координат имеем следующие начальные условия:

$$t=0,\ x=0,\ y=0,\ v_x=0,\ v_y=v_0\cos\alpha,\ v_z=v_0\sin\alpha. \tag{б}$$

Каждое дифференциальное уравнение системы в рассматриваемом случае можно интегрировать отдельно, независимо от других уравнений. После сокращения на m дифференциальные уравнения примут вид

$$dv_x/dt=-kv_x; \ dv_y/dt=-kv_y; \ dv_z/dt=-g-kv_z. \tag{в}$$

Разделяя переменные и интегрируя каждое из уравнений системы, получаем:

$$\ln v_x=-kt+\ln C_1; \ \ln v_y=-kt+\ln C_2; \ \ln(v_z+g/k)=-kt+\ln C_3.$$

После потенцирования имеем:

$$v_x=C_1e^{-kt}; \ v_y=C_2e^{-kt}; \ v_z=-g/k+C_3e^{-kt}. \tag{г}$$

Подставляя в (г) начальные значения для v_x, v_y, v_z, получаем уравнения для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3:

$$0=C_1; \quad v_0\cos\alpha=C_2; \quad v_0\sin\alpha=-g/k+C_3.$$

Постоянные интегрирования имеют следующие значения:

$$C_1=0; \quad C_2=v_0\cos\alpha; \quad C_3=g/k+v_0\sin\alpha.$$

После подстановки постоянных интегрирования в (г) и замены проекций скорости на оси координат производными от координат по времени получаем

$$\left.\begin{aligned}&dx/dt=0; \quad dy/dt=v_0\cos\alpha e^{-kt};\\ &dz/dt=(g/k+v_0\sin\alpha)e^{-kt}-g/k.\end{aligned}\right\} \tag{г′}$$

Разделяя в (г′) переменные и интегрируя каждое дифференциальное уравнение первого порядка, имеем

$$\left.\begin{aligned}&x=C_4; \quad y=\frac{-v_0\cos\alpha}{k}e^{-kt}+C_5;\\ &z=-\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)e^{-kt}-gt/k+C_6.\end{aligned}\right\} \tag{д}$$

Подставляя в (д) начальные условия, получаем уравнения для определения постоянных интегрирования C_4, C_5, C_6:

$$0=C_4; \quad 0=-\frac{v_0\cos\alpha}{k}+C_5; \quad 0=-\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)+C_6.$$

Отсюда находим

$$C_4=0; \quad C_5=(v_0\cos\alpha)/k; \quad C_6=(1/k)(g/k+v_0\sin\alpha).$$

Подставляя значения постоянных в (д), получаем искомые уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned}&x=0; \quad y=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt});\\ &z=\frac{1}{k}(g/k+v_0\sin\alpha)(1-e^{-kt})-\frac{g}{k}t.\end{aligned}\right\} \tag{е}$$

Проведем некоторые исследования движения точки. Из уравнений движения (е) путем предельного перехода при k, стремящемся к нулю, можно получить уравнения движения точки под действием только одной силы тяжести. Обозначая координаты точки в этом случае x_1, y_1, z_1, раскрываем неопределенности в уравнениях (е) по правилу Лопиталя. Для y_1 получаем

$$y_1=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{1-e^{-kt}}{k}=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{(d/dk)(1-e^{-kt})}{dk/dk}=$$
$$=v_0\cos\alpha\lim_{k\to 0}\frac{t\cdot e^{-kt}}{1}=v_0t\cos\alpha.$$

Прежде чем переходить к пределу в z, преобразуем его к виду

$$z=\frac{g(1-e^{-kt}-kt)}{k^2}+\frac{v_0\sin\alpha(1-e^{-kt})}{k}.$$

После этого

$$z_1=g\lim_{k\to 0}\frac{(d^2/dk^2)(1-e^{-kt}-kt)}{(d^2/dk^2)k^2}+v_0\sin\alpha\lim_{k\to 0}\frac{(d/dk)(1-e^{-kt})}{dk/dk}=$$
$$=g\lim_{k\to 0}\frac{-t^2e^{-kt}}{2}+v_0\sin\alpha\lim_{k\to 0}\frac{te^{-kt}}{1}=-\frac{gt^2}{2}+v_0t\sin\alpha.$$

Получаем следующие уравнения движения точки под действием одной силы тяжести:

$$x_1=0; \quad y_1=v_0t\cos\alpha; \quad z_1=v_0t\sin\alpha-gt^2/2.$$

Если из этих уравнений исключить время t, то получим уравнения траектории точки в координатной форме (рис. 12):

$$x_1=0; \quad z_1=y_1\operatorname{tg}\alpha-\frac{gy_1^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{ж}$$

Траекторией точки является парабола, расположенная в плоскости $x_1=0$.

Если в (ж) принять $z_1=0$, то y_1 при этом окажется горизонтальной дальностью l, которая определяется по формуле

$$l=2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha/g=v_0^2\sin 2\alpha/g. \tag{з}$$

Из (з) следует, что наибольшая горизонтальная дальность получается при угле бросания $\alpha=45°$:

$$l_{max}=v_0^2/g.$$

При других углах бросания α одну и ту же дальность l, как это следует из (з), можно получить бросая точку под углом α к горизонту или под тем же углом α к вертикали с той же самой скоростью v_0.